

# Zum translationsinvarianten Oszillatorenpotential

Von GERHART LÜDERS

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen  
(Z. Naturforschg. 16 a, 76—78 [1961]; eingegangen am 14. September 1960)

The quantum mechanical problem is discussed of  $A$  identical particles moving in a translationally invariant oscillator potential. Use is made of the close connection of this problem with the one where the potential is fixed in space. In particular, relations are given between the number of states of prescribed permutational symmetry (and orbital angular momentum) and of fixed energy, in the two problems.

**1.** Die Bewegung von  $A$  gleichartigen Teilchen im isotropen Oszillatorenpotential (Schalenmodell) wird durch den HAMILTON-Operator<sup>1</sup>

$$H_F = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^A \mathbf{p}_j^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{j=1}^A \mathbf{r}_j^2 \quad (1)$$

bestimmt. Ersetzt man hier das raumfeste Potential durch ein translationsinvariantes, so erhält man den HAMILTON-Operator

$$H_T = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^A \mathbf{p}_j^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{j=1}^A (\mathbf{r}_j - \mathbf{R})^2 \quad (2)$$

mit  $\mathbf{R} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A \mathbf{r}_j \quad (3)$

als Schwerpunktoperator. Die HAMILTON-Operatoren  $H_F$  und  $H_T$  stehen in einem einfachen Zusammenhang; ein ähnlich einfacher Zusammenhang besteht nicht für vom Oszillatorenpotential abweichende Potentiale. Man kann nämlich schreiben

$$H_F = H_{0F} + H', \quad H_T = H_{0T} + H', \quad (4)$$

wobei

$$H_{0F} = \frac{1}{2Am} \mathbf{P}^2 + \frac{Am\omega^2}{2} \mathbf{R}^2, \quad H_{0T} = \frac{1}{2Am} \mathbf{P}^2 \quad (5)$$

ist mit  $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^A \mathbf{p}_j \quad (6)$

als Operator des Gesamtmpulses, und wobei der in beiden Fällen gleiche Operator  $H'$  die Gestalt

$$H' = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^A \left( \mathbf{p}_j - \frac{1}{A} \mathbf{P} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} \sum_{j=1}^A (\mathbf{r}_j - \mathbf{R})^2 \quad (7)$$

<sup>1</sup>  $\hbar=1$ . Der Index F soll an die Festhaltung des Potentials und der sogleich auftretende Index T an die Translationsinvarianz erinnern.

besitzt. Dieser HAMILTON-Operator der inneren Bewegung hängt nur von Orts- und Geschwindigkeitsdifferenzen ab; er ist daher mit  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{R}$  und deshalb auch mit  $H_{0F}$  und  $H_{0T}$  vertauschbar. Er kann als Funktion von je  $A-1$  Orts- und Impulsvariablen der inneren Bewegung geschrieben werden; jedoch wird eine solche Schreibweise im folgenden nicht benötigt werden.

Ein vollständiges System von Eigenzuständen zu  $H_F$  bzw.  $H_T$  wird durch Produktansatz gefunden. Es sei

$$H' \Phi_m = E'_m \Phi_m; \quad (8)$$

fernher gilt für die Schwerpunktbewegung<sup>2</sup>

$$H_{0F} \psi_{n..} = \omega(n + \frac{3}{2}) \psi_{n..}, \quad H_{0T} \psi_{\mathbf{P}} = \frac{1}{2Am} \mathbf{P}^2 \psi_{\mathbf{P}} \quad (9)$$

(Bewegung im Oszillatorenpotential der Frequenz  $\omega$  bzw. kräftefreie Bewegung). Die Quantenzahl  $n$  des Schwerpunktoszillators kann die Werte  $n=0, 1, 2, \dots$  annehmen; die Pünktchen bei  $\psi_{n..}$  stehen für weitere (etwa Drehimpuls-)Quantenzahlen. Die Eigenzustände und Energieeigenwerte zu  $H_F$  bzw.  $H_T$  sind dann durch

$$\begin{aligned} H_F \psi_{n..} \Phi_m &= [\omega(n + \frac{3}{2}) + E'_m] \psi_{n..} \Phi_m, \\ H_T \psi_{\mathbf{P}} \Phi_m &= \left[ \frac{1}{2Am} \mathbf{P}^2 + E'_m \right] \psi_{\mathbf{P}} \Phi_m \end{aligned} \quad (10)$$

gegeben. Bei  $H_T$  ist die kräftefreie Schwerpunktbewegung physikalisch uninteressant; man setzt etwa  $\mathbf{P}=0$  und untersucht dann nur noch die durch  $H'$  bestimmte innere Bewegung.

In dieser Arbeit sollen aus den geläufigeren Eigenschaften von  $H_F$  diejenigen von  $H_T$  erschlossen werden. Obwohl über das translationsinvariante Oszilla-

<sup>2</sup> Der Buchstabe  $\mathbf{P}$  bedeutet hier den Eigenwert und nicht den Operator.



törpotential eine Reihe von Arbeiten vorliegt<sup>3</sup>, werden dabei in Abschn. 3 und 4 einige bisher offenbar noch nicht veröffentlichte Resultate gewonnen.

**2.** Die Energieeigenwerte zu  $H_F$  sind bekannt; sie sind gegeben durch

$$E_{FN} = \omega [N + \frac{3}{2} A], \quad (11)$$

wobei die Oszillatorquantenzahl  $N$  eine nichtnegative ganze Zahl ist. Aus der ersten Gl. (10) folgt dann für die Eigenwerte zu  $H'$  (bzw.  $H_T$  mit  $\mathbf{P} = 0$ )

$$E'_N = \omega [N + \frac{3}{2} (A - 1)]. \quad (12)$$

Diese Eigenwerte folgen also ebenfalls im Abstand  $\omega$  aufeinander.

Eine eindeutige Zuordnung zwischen den Eigenfunktionen zu  $H_F$  und denen zu  $H'$  wird geliefert, wenn man  $\psi_{n..}$  fest wählt. Es liegt nahe, den Grundzustand  $\psi_0$  des Schwerpunktoszillators hierfür zu verwenden<sup>4</sup>. Da der Grundzustand des Schwerpunktoszillators Bahndrehimpuls Null hat, ist der Bahndrehimpuls der auf diese Weise einander zugeordneten Eigenzustände gleich. Da ferner der Schwerpunkt von den Teilchenkoordinaten in symmetrischer Weise abhängt, ist das Symmetrieverhalten beider Lösungen bei Permutation der Teilchen das gleiche; gehorcht insbesondere  $\Phi_m$  dem PAULI-Prinzip<sup>5</sup>, so auch  $\psi_0 \Phi_m$ .

Matrixelemente translations- und GALLILEI-invarianter (also mit  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{R}$  vertauschbarer) Größen können mit dem gleichen Resultat statt zwischen Eigenzuständen zu  $H'$  zwischen den eindeutig zugeordneten Eigenzuständen zu  $H_F$  berechnet werden. Das gilt insbesondere für die störungsmäßige Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen den Teilchen. Die Eigenfunktionen zu  $H'$ , die durch Relativkoordinaten auszudrücken wären, werden daher praktisch nie benötigt<sup>6</sup>.

**3.** Für die Eigenzustände zu  $H_F$  bzw.  $H'$  (oder  $H_T$ ) sei jetzt ein bestimmtes Symmetrieverhalten bei Permutationen gefordert, etwa vollständige Antimetrie (PAULI-Prinzip).  $N_0$  sei die kleinste Oszillator-

quantenzahl im Sine von Gl. (11), für die es zu  $H_F$  einen Eigenzustand mit der geforderten Symmetrie gibt. Die als bekannt angenommene Anzahl linear unabhängiger Eigenzustände zu  $H_F$  mit Oszillatorquantenzahl  $N$  und der geforderten Symmetrie werde mit  $m_F(N)$  bezeichnet. Gesucht ist die Anzahl  $m_T(N)$  linear unabhängiger Eigenzustände zu  $H'$  mit gleicher Oszillatorquantenzahl und gleicher Symmetrie. Die Symmetrie wird dabei durch die Schwerpunktbewegung nicht beeinflußt.

Ist  $N = N_0$ , so hat die Energie der inneren Bewegung mit der geforderten Symmetrie ebenfalls ihren Minimalwert und der Schwerpunktoszillator befindet sich notwenig im nicht-entarteten Grundzustand; es gilt also

$$m_F(N_0) = m_T(N_0). \quad (13)$$

Im (möglicherweise entarteten) Grundzustand zu  $H_F$  mit der geforderten Symmetrie gibt es also keine *spurious states*<sup>7</sup> (vgl. Anm. 4). Ist  $N = N_0 + 1$ , so befindet sich entweder die innere Bewegung im Grundzustand, und die Schwerpunktbewegung ist einfach angeregt (mit 3 linear unabhängigen Eigenzuständen), oder man hat den ersten angeregten Zustand der inneren Bewegung und den Grundzustand der Schwerpunktbewegung. Deshalb gilt

$$m_F(N_0 + 1) = m_T(N_0 + 1) + 3 m_T(N_0) \quad (14)$$

mit der Auflösung [vgl. Gl. (13)]

$$m_T(N_0 + 1) = m_F(N_0 + 1) - 3 m_F(N_0). \quad (15)$$

Allgemein kann man schreiben

$$m_F(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(n+1)(n+2) m_T(N-n), \quad (16)$$

wobei  $m_T(N') = 0$  für  $N' < N_0$  (17)

ist. In den angeregten Zuständen gibt es stets *spurious states*. Gl. (16) läßt eine einfache Auflösung zu; es gilt

$$\begin{aligned} m_T(N) &= m_F(N) - 3 m_F(N-1) \\ &\quad + 3 m_F(N-2) - m_F(N-3) \end{aligned} \quad (18)$$

<sup>3</sup> H. A. BETHE u. M. E. ROSE, Phys. Rev. **51**, 283 [1937]. — I. BLOCH u. Y. C. HSIEH, Phys. Rev. **96**, 382 [1954]. — J. P. ELLIOTT u. T. H. R. SKYRME, Proc. Roy. Soc., Lond. A **232**, 561 [1955]. — H. J. LIPKIN, Suppl. Nuovo Cim. **4**, 1147 [1956]. — Y. C. HSIEH u. I. BLOCH, Phys. Rev. **101**, 205 [1956]. — S. GARTENHAUS u. C. SCHWARZ, Phys. Rev. **108**, 482 [1957]. — H. J. LIPKIN, Phys. Rev. **110**, 1395 [1958]. — M. KRETSCHMAR, Z. Phys. **157**, 433 [1959]; **158**, 284 [1960]. — P. MOEBIUS, Nucl. Phys. **18**, 224 [1960].

<sup>4</sup> Dies ist die durch ELLIOTT und SKYRME<sup>3</sup> getroffene Zuord-

nung; die hierbei nicht erfaßten Eigenzustände zu  $H_F$  werden von den Verfassern *spurious states* genannt.

<sup>5</sup> Andere Symmetriecharaktere treten auf, wenn man Spin und Isospin einführt; vgl. die Supermultiplett-Theorie von E. P. WIGNER, Phys. Rev. **51**, 106 [1937].

<sup>6</sup> Eine Methode der Konstruktion von Eigenfunktionen zu  $H_F$ , insbesondere der den Eigenfunktionen zu  $H'$  eindeutig zugeordneten, soll in einer späteren Arbeit mitgeteilt werden.

<sup>7</sup> Ein expliziter Beweis für vollständige Antimetrie findet sich bei BETHE und ROSE<sup>3</sup> und bei ELLIOTT und SKYRME<sup>3</sup>.

mit  $m_F(N') = 0 \quad \text{für } N' < N_0.$  (19)

4. In entsprechender Weise sollen die linear unabhängigen Drehimpulsmannigfaltigkeiten gegebenen Permutationsverhaltens abgezählt werden. Gegeben sei für alle Oszillatorquantenzahlen  $N (\geq N_0)$  und alle Bahndrehimpulse  $L (\geq 0)$  die Anzahl linear unabhängiger Drehimpulsmannigfaltigkeiten zu  $H_F$ , gesucht sei die entsprechende Anzahl zu  $H'$  (oder  $H_T$ ); diese Anzahlen sollen mit  $m_F(N, L)$  bzw.  $m_T(N, L)$  bezeichnet werden. Da eine Drehimpulsmannigfaltigkeit  $2L+1$  linear unabhängige Zustände enthält, gilt

$$\begin{aligned} m_F(N) &= \sum_L (2L+1) m_F(N, L), \\ m_T(N) &= \sum_L (2L+1) m_T(N, L). \end{aligned} \quad (20)$$

Im möglicherweise entarteten Grundzustand ( $N=N_0$ ) zu  $H_F$  befindet sich der Schwerpunktoszillator im Grundzustand; sein Bahndrehimpuls  $l$  ist dann gleich 0. Es gilt daher

$$m_F(N_0, L) = m_T(N_0, L). \quad (21)$$

Im ersten angeregten Zustand zu  $H_F$  befindet sich der Schwerpunkt im Grundzustand ( $l=0$ ) oder im ersten angeregten Zustand ( $l=1$ ). Die Drehimpulse der inneren Bewegung und der Schwerpunktbewegung sind nach dem Vektormodell zusammenzusetzen; es gilt daher

$$\begin{aligned} m_F(N_0+1, 0) &= m_T(N_0+1, 0) + m_T(N_0, 1), \\ m_F(N_0+1, L) &= m_T(N_0+1, L) + m_T(N_0, L-1) \\ &\quad + m_T(N_0, L) + m_T(N_0, L+1) \end{aligned} \quad (22)$$

<sup>8</sup> Der vollständige Beweis der Gl. (26) ist dem Verf. nicht gelungen. Die Lösung wurde an vielen Beispielen geprüft;

( $L \geq 1$ ). Die Auflösung nach den  $m_T(N_0+1, L)$  ist nicht schwierig; man findet

$$\begin{aligned} m_T(N_0+1, 0) &= m_F(N_0+1, 0) - m_F(N_0, 1), \\ m_T(N_0+1, L) &= m_F(N_0+1, L) - m_F(N_0, L-1) \\ &\quad - m_F(N_0, L) - m_F(N_0, L+1), \end{aligned} \quad (23)$$

wobei wieder  $L \geq 1$  sei.

Entsprechend gewinnt man die allgemeine Beziehung

$$m_F(N, L) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l(n)}^{L'=L+l(n)} \sum_{L'=|L-l(n)|} m_T(N-n, L') \quad (24)$$

mit  $m_T(N', L') = 0 \quad \text{für } N' < N_0.$  (25)

Die Größen  $l(n)$  sind diejenigen Bahndrehimpulse, die im Einteilchenproblem (Schwerpunktoszillator) bei der Oszillatorquantenzahl  $n$  vorkommen (0, 2, 4, ...,  $n$  bzw. 1, 3, 5, ...,  $n$ ). Die Auflösung dieses Gleichungssystems ist überraschend einfach<sup>8</sup>; es gilt

$$\begin{aligned} m_T(N, 0) &= m_F(N, 0) - m_F(N-1, 1) \\ &\quad + m_F(N-2, 1) - m_F(N-3, 0), \\ m_T(N, L) &= m_F(N, L) - m_F(N-1, L-1) \\ &\quad - m_F(N-1, L) - m_F(N-1, L+1) \\ &\quad + m_F(N-2, L-1) + m_F(N-2, L) \\ &\quad + m_F(N-2, L+1) - m_F(N-3, L) \end{aligned} \quad (26)$$

( $L \geq 1$ ) mit

$$m_F(N', L') = 0 \quad \text{für } N' < N_0. \quad (27)$$

Herrn STEINWEDEL danke ich dafür, daß er 1951 mein Interesse am translationsinvarianten Oszillatorenpotential geweckt hat. Herrn HEISENBERG danke ich für die in seinem Institut im Herbst 1960 gewährte Gastfreundschaft.

unter Verwendung von Gl. (20) zeigt man außerdem leicht, daß Gl. (18) erfüllt wird.